А.М. Аронов, А.М. Скрипка

Статья поступила
в редакцию
в декабре 2007 г.

СТАНОВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Аннотация

Развитие математического мышления как цель математического образования требует организации математической деятельности учащихся. Для этого необходимо пересмотреть существующие формы и методы раскрытия содержания математического образования, ввести новые средства освоения этого содержания. В качестве одного из таких средств в данной статье предлагается мысленный эксперимент.

Развитие математического мышления как цель обучения

Представления о том, какой должна быть математическая подготовка в основной школе, претерпели за исторически непродолжительный период времени радикальные изменения. Еще менее 30 лет назад целью обучения математике считалось вооружение учащихся «системой математических знаний и основанных на них умений и навыков» [14, с. 21] для решения практических задач, изучения других учебных предметов, продолжения образования. Развитие математического мышления школьников упоминалось в задачах обучения лишь как средство прочного усвоения знаний. Сегодня развитие математического мышления является самостоятельной целью математического образования на каждой ступени обучения, в том числе и в основной школе.

Согласно теории деятельности мышление развивается только при осуществлении соответствующей деятельности. Математическому мышлению, если его понимать как «качества мышления, характерные для математической деятельности» [10], соответствует математическая деятельность. Она, как и любая другая, заключается в созидании новых структур [7]. Математическая деятельность «задается двумя не сводимыми друг к другу процессами: процессом построения математического знания и процессом его преобразования к виду, пригодному для научной коммуникации (в виде системы знаний, содержащей определения, теоремы и доказательства)» [1, с. 105]. Математическая деятельность осуществляется в виде математического моделирования, следования математическому алгоритму (правилу) и формулирования математических утверждений. Моделирование включает построение математических моделей ситуаций, объектов и отношений, их исследование и интерпретацию. Следование алгоритму связано «с пониманием алгоритмических процедур и получением определенного продукта по данной абстрактной схеме» [1, с. 105]. Как вид математической деятельности, оно включает реконструкцию правила по данному частному случаю его применения, использование алгоритма, обнаружение ограничений алгоритма и его перестройку. Формулирование утверждений связано с конструированием математических утверждений (предложений), оценкой их правдоподобности и построением доказательства.

Модель математического мышления

Осуществление математической деятельности является необходимым условием развития математического мышления, которое мы вслед за авторами проекта «Индивидуальный прогресс» [13] связываем с изменением действий, их усложнением. Это представление о развитии мышления легло в основу модели математического мышления, представленной нами на материале геометрии [3]. В ней мышление описано через действия с математическим материалом: оперирование математическими моделями, оперирование математическими предложениями и оперирование рассуждениями (в модели последним двум действиям соответствуют логика и металогика). Оперирование заключается, например, в конструировании предмета, его изменении и т.д. Эти действия имеют разную степень сложности. Так, оперирование моделями является наиболее простым, а оперирование рассуждениями — наиболее сложным действием. Каждое действие предполагает разные уровни овладения им. В качестве таковых приняты первые три пункта когнитивной части таксономии Б.С. Блума: знание, понимание, применение [9]. Первый уровень (уровень знания) означает наличие информации об исследуемом предмете, ее узнавание и возможность воспроизведения при необходимости. Второй уровень (уровень понимания) включает эффективное упорядочение информации, выбор нужной информации из всей имеющейся. Третий уровень (уровень применения) требует распознавания ситуаций, в которых может быть применима определенная информация, и ее применения. На третьем уровне овладения действием из имеющихся знаний конструируются новые.

Модель математического мышления можно представить в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

Модель математического мышления

	Оперирование математическими моделями	**Оперирование математическими предложениями**	**Оперирование рассуждениями**
Знание			
Понимание			
Применение			

Каждое сочетание уровня сложности действия и уровня овладения им характеризуется собственным набором действий. Так, пересечению «знание — оперирование моделями» соответствуют знание моделей и конкретных действий с ними, их узнавание, воспроизведение. Пересечение «понимание — оперирование моделями» включает установление родо-видовых отношений между моделями, отношений модели и ее элементов и т.д. Пересечение «применение — оперирование моделями» характеризуется такими действиями, как самостоятельное моделирование ситуации, изменение модели, описание ситуации по ее модели. Оперирование предложениями и рассуждениями подобно оперированию моделями в соответствующих пересечениях. Возможные различия обусловлены особенностями предметов оперирования.

Развитие математического мышления происходит и «по вертикали» (усложнение действий), и «по горизонтали» (изменение действий). Начинается оно с пересечения «знание — оперирование математическими моделями», заканчивается на пересечении «применение — оперирование рассуждениями».

В условиях школьного образования значение имеют этапы становления и уровни развития мышления. На основании достигаемых результатов мы выделяем три этапа становления математического мышления [3].

I этап — знакомство с математическими моделями и действиями с ними. В представленной модели (табл. 1) этому этапу соответствует пересечение «знание — оперирование математическими моделями».

II этап — установление взаимосвязи между моделями и (или) математическими предложениями. В модели математического мышления данному этапу соответствуют пересечения «понимание — оперирование математическими моделями», «знание — оперирование математическими предложениями», «понимание — оперирование математическими предложениями», которые добавляются к усвоенным действиям на пересечении «знание — оперирование математическими моделями». На этом этапе определяются родо-видовые отношения моделей, происходит знакомство с некоторыми математическими предложениями (определениями, аксиомами, теоремами и т.д.), раскрываются зависимости между условиями и заключениями теорем и т.д.

III этап — построение математических теорий. К перечисленным на первых двух этапах пересечениям здесь добавляются все оставшиеся. На данном этапе происходят применение известных знаний в новых ситуациях, оценка границ знаний, конструирование новых знаний, построение доказательств, их оценка и т.д.

В соответствии с данными этапами мы выделяем в становлении математического мышления три уровня. Первый уровень характеризуется способностью выполнять известные действия с известными математическими моделями. Второй уровень означает способность устанавливать взаимосвязи между математическими моделями и (или) математическими предложениями. Третий уровень, наиболее высокий, заключается в способности применять знания в новых ситуациях. По способу задания этих уровней достижение каждого из них предполагает успешное выполнение действий на предыдущих уровнях.

Введение мысленного эксперимента в школьное образование

Традиционное обучение математике обеспечивает формирование первого и второго уровней математического мышления, и этого достаточно для прочного усвоения знания, т.е. достижения прежней цели математического образования. Появление новой цели — развитие математического мышления — предполагает достижение школьниками третьего уровня. В связи с изменением целей возникает необходимость в новых средствах обучения — новых формах математического образования и новых способах раскрытия его содержания. Одним из таких средств должен стать мысленный эксперимент.

Согласно И. Канту, мысленный эксперимент (в его терминологии — конструирование) лежит в основе математической деятельности. Благодаря ему конструируются знания о предмете, а вместе с ними и способ их обоснования: «Математика выводит свои знания не из готовых понятий, а из конструирования их вместе с конструированием объектов» [8, с. 35]. Мысленный эксперимент дает «основания, из которых развертывается дедукция» [Там же, с. 38]. Другими словами, мысленный эксперимент обеспечивает процесс порождения математического знания, который, по наблюдениям В.А. Гусева, Г.Б. Шабата и других известных дидактиков математики, в школьном математическом образовании представлен слабо. Поскольку порождение новых знаний соответствует третьему уровню математического мышления, введение мысленного эксперимента в школьное образование будет способствовать достижению школьниками этого уровня.

Обзор научно-методической литературы показал, что пока существуют единичные примеры организации мысленного эксперимента в школьном образовании. В начальной школе он используется в системе развивающего обучения Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова. «В процессе учебной деятельности ...дети ...воспроизводят ...те исторически возникшие способности, которые лежат в основе теоретического сознания и мышления, — рефлексию, анализ, мысленный эксперимент», — писал В.В. Давыдов [7, с. 321]. Организовать мысленный эксперимент в средней и старшей школах пробуют Г.Б. Шабат (компьютерная программа «Живая математика»), М.А. Холодная («обогащающая модель» обучения). Других примеров организации мысленного эксперимента в школьном образовании мы не нашли.

Каким образом мысленный эксперимент может быть введен в математическое образование? Конкретизируем данный вопрос. Во-первых, какую функцию может выполнять мысленный эксперимент в математическом образовании? Во-вторых, в какой форме он может быть использован? В-третьих, какие стадии имеет введение мысленного эксперимента?

За ответом на первый вопрос обратимся к И. Канту: мысленный эксперимент, пишет он, дает идею доказательства, решения задачи. Поэтому мысленный эксперимент в математическом образовании может выполнять функцию объяснения доказательств. Хорошо известно, что доказательства в учебниках представляют собой описание результата некоторой умственной деятельности, а не процесса. Они представлены как формальные логические выводы. Здесь не показан процесс доказательства, в котором логические ходы возникают и наделяются смыслом. Как следствие, доказательства из учебников для читателя бессодержательны. Мысленный эксперимент позволяет придать им смысл, показывая, как были получены те или иные идеи.

У И. Лакатоса мысленный эксперимент сопровождает любое доказательство: «Доказательство ...тогда доказывает, ...когда оно протекает как мысленный эксперимент» [11, с. 59]. Мы полагаем, что в общем образовании представлять каждое доказательство как мысленный эксперимент нецелесообразно. Многие теоремы школьного курса геометрии (именно в геометрии школьники чаще всего встречаются с необходимостью доказывать) являются прямыми следствиями определений или других теорем. Они выводятся по правилам силлогизма. Например, теорема о равенстве углов равностороннего треугольника является прямым следствием свойства углов равнобедренного треугольника. Проведение мысленного эксперимента является необходимым, по М.В. Мостепаненко, «в поисках решения принципиальных теоретических проблем» [12, с. 94]. Другими словами, мысленный эксперимент необходим при доказательстве принципиальных, основных теорем. В математике такими являются, например, теорема о сумме углов треугольника (многоугольника), теорема Пифагора (теорема косинусов), основная теорема арифметики, теорема о разрешимости квадратного уравнения, формула синуса суммы двух углов, формула суммы геометрической прогрессии. Вопрос о списке принципиальных теорем математики открыт и в преподавании не обсуждается.

Функция объяснения предполагает работу с готовым доказательством. Учителю и учащимся здесь требуется выделить или реконструировать его идею. В ситуации, когда доказательства еще нет, мысленный эксперимент может выполнять функцию его конструирования. Использование мысленного эксперимента для конструирования является более сложным, чем для объяснения. Поэтому если уметь объяснять доказательства должны все учащиеся, то конструировать их с помощью мысленного эксперимента смогут лишь некоторые.

Перейдем к вопросу о форме введения мысленного эксперимента в школьное образование. Существуют два описания мысленного эксперимента — В.С. Библера и В.В. Давыдова. Их существенным отличием является форма проведения мысленного эксперимента. У В.С. Библера мысленный эксперимент имеет диалогическую форму. При его проведении сталкиваются противоположные логики мышления. Это выражается в разных способах решения задачи. В.В. Давыдов допускает проведение мысленного эксперимента в форме монолога, для которого достаточно одной логики мышления.

Монолог является более простой формой по сравнению с диалогом. По этой причине мы предлагаем ввести мысленный эксперимент в школьное образование в форме монолога, как его рассматривает В.В. Давыдов. Для примера наложим эту форму на геометрический материал. Другими словами, определим содержание мысленного эксперимента на геометрическом материале.

В описании В.В. Давыдова мысленный эксперимент предстает как результат теоретического мышления. Он описан через свои особенности, которые В.В. Давыдов называет также этапами мысленного эксперимента [7].

1. Предмет познания мысленно перемещается в такие условия, в которых его сущность может раскрыться с особой определенностью.

2. Этот предмет становится объектом последующих мысленных трансформаций.

3. Мысленно формируется та среда, та система связей, в которую помещается этот предмет.

Чтобы представить себе эти этапы на материале геометрии, обратимся сначала к предмету познания и его сущности.

В геометрии предметом познания является геометрический объект — фигура или несколько фигур, находящихся в определенном отношении. По поводу этого объекта высказывается некоторое утверждение, состоящее из условия и заключения. В условии описан сам объект, в заключении — знание о нем. Например, в теореме Пифагора предметом познания является прямоугольный треугольник. В признаках равенства треугольников им будут два треугольника с определенным отношением их элементов.

Сущность геометрического объекта определяется особыми отношениями его элементов, которые задают только данный объект. Эти отношения зафиксированы в определении фигуры и предназначены для задания ее образа (задания фигуры на уровне явления). Далеко не всякое определение фигуры содержит особые отношения, которые отличают данную фигуру от подобных ей. Примерами особых отношений являются перпендикулярность сторон, которая отличает прямоугольный треугольник от всех прочих, равенство сторон, отличающее равнобедренный треугольник. Как правило, сущность геометрического объекта для своего выявления требует специального исследования. Иногда она задается в виде теоремы (критерия, признака) школьной математики, а иногда отсутствует в учебниках. Сущность одного геометрического объекта может быть представлена разными особыми отношениями.

Теперь мы можем задать этапы мысленного эксперимента на материале геометрии. Первым этапом будет перемещение геометрического объекта в такие условия, в которых особые отношения элементов данного объекта могут стать видимыми, явными. Здесь следует обратить внимание на слово «могут». Помещение геометрического объекта в некоторые условия не гарантирует раскрытия его особых отношений с особой определенностью. И как следствие, не обязательно поможет в решении задачи. Поэтому при решении задачи объект обычно перемещается в разные условия. Такими условиями могут быть допущение, обратное заключению утверждения (как в доказательстве методом от противного), помещение объекта или его элементов в определенное отношение с некоторой геометрической фигурой (дополнительное построение), фиксация элементов (их величины или положения) объекта и другие.

Перейдем ко второму этапу. Здесь предмет познания подвергается трансформации. Согласно М.В. Мостепаненко, трансформируется не столько сам предмет, «сколько типичные и существенные связи и отношения» [12, с. 98]. Таким образом, на данном этапе практически осуществляется переход от предмета к его частям. В геометрии это переход от фигуры (системы фигур) к ее частям. При этом рассматриваются те части, которые наиболее полно характеризуют данную фигуру в данных условиях. И они подвергаются трансформации.

В статье [4] описаны пять способов трансформации геометрического объекта:

1) количественная трансформация предмета (например, увеличение количества углов в многоугольнике);

2) введение новых элементов (дополнительные построения);

3) усиление основных свойств предмета (например, равенство отдельных элементов фигур может быть проинтерпретировано как равенство составных частей целостной структуры);

4) выделение составных частей предмета познания и рассмотрение их как самостоятельных;

5) трансформация предмета в сторону бесконечности с отождествлением с другим математическим понятием (например, бесконечное увеличение сторон правильного многоугольника приводит к окружности).

Анализ мысленных экспериментов, проведенных авторами статьи [4] на материале геометрии, позволил выделить еще два способа: движение предмета (например, поворот) и изменение статуса объекта или его части (например, отрезок начинает рассматриваться как часть некоторой прямой).

В процессе трансформации одних частей наблюдается, как изменяются другие части. На основе этих наблюдений формируются система отношений между выделенными на втором этапе частями и система связей между этими и другими отношениями. Другими словами, фиксируются наблюдаемые отношения между частями фигуры и изменения одних отношений при трансформации других отношений. В этом заключается содержание третьего этапа мысленного эксперимента на материале геометрии.

Завершается мысленный эксперимент выводом о рассматриваемом объекте, сделанным на основе полученной системы связей. В нем заключено знание о данном геометрическом объекте как особом среди подобных ему. Это знание, раскрывая новые стороны объекта, помогает решить поставленную задачу, ради которой мысленный эксперимент и проводился.

В дидактических целях удобно, сохраняя приведенные в учебниках доказательства теорем, через мысленный эксперимент доказывать факты, не рассматриваемые в учебниках. Например, сохраняя доказательство теоремы Пифагора, можно предварительно с помощью мысленного эксперимента обнаружить и доказать факт, что высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает прямоугольный треугольник на два подобных ему треугольника. При этом результатом первого этапа будет обнаружение свойства исследуемого объекта, результатом второго и третьего этапов — доказательство, что найденное свойство является также признаком этого объекта.

Перейдем к вопросу о стадиях введения мысленного эксперимента в школьное образование. Мы выделяем пять стадий, которые отличаются друг от друга степенью самостоятельности учащихся в проведении мысленного эксперимента.

На первой стадии учащиеся знакомятся с мысленным экспериментом как способом рассуждения, его структурой. Если учащиеся уже встречались с мысленным экспериментом, то на этой стадии они выделяют особенности мысленного эксперимента на математическом материале. Это знакомство проходит через презентацию рассуждений взрослого (учителя, автора дополнительного учебного текста) на материале нескольких теорем. Взрослый предупреждает о проведении мысленного эксперимента, проводит рассуждение, обозначает начало и окончание мысленного эксперимента и его этапов, указывает результат. Задача учащихся — сделать обобщенное описание содержания этапов мысленного эксперимента. Данную стадию мы характеризуем как наблюдение выделенного взрослым явления.

На второй стадии учащиеся выполняют задания на узнавание мысленного эксперимента среди других похожих рассуждений, выделение этапов конкретного мысленного эксперимента. Здесь также происходит работа с готовыми рассуждениями. Но предупреждение о проведении мысленного эксперимента отсутствует, границы этапов не выделяются. Эту стадию можно охарактеризовать как наблюдение невыделенного явления.

По содержанию вторая стадия введения мысленного эксперимента обратна первой. Если на первой стадии школьники приобретали общие представления о мысленном эксперименте и его этапах, то на второй им надо применить эти представления в конкретных ситуациях.

На третьей стадии учащиеся пробуют проводить мысленные эксперименты при помощи взрослого. Эта помощь предлагается в виде подсказок. Ими могут служить рисунок с необходимыми для решения пометками, указание на аналогичное рассуждение, последовательность вопросов. Посредством подсказок взрослый помогает учащимся решить, в какие условия следует поместить предмет, каким трансформациям его подвергнуть, на какую систему связей обратить внимание. Тип подсказок определяется степенью подготовленности учащихся к проведению эксперимента. Чем более подготовлен ученик, тем меньше информации о решении задачи должна нести подсказка. Но в любом случае в силу этапности мысленного эксперимента она должна указать условия, в которые следует поместить предмет. Третья стадия характеризуется получением пробы мысленного экспериментирования.

В отличие от первых двух третья стадия и следующие за ней для своей реализации требуют дополнительного ресурса времени. Мы рекомендуем организовать их прохождение на дополнительных занятиях, факультативах и т.п.

На четвертой стадии учащиеся самостоятельно проводят мысленный эксперимент в знакомой ситуации, описывают задачи, решаемые посредством мысленного эксперимента. От них требуется построение канонического описания метода мысленного эксперимента, оформление опыта мысленного экспериментирования. На четвертой стадии мысленный эксперимент используется при решении задач, по структуре аналогичных задачам, решенным с помощью этого метода на первых трех стадиях. Учащиеся должны сами догадаться о целесообразности проведения мысленного эксперимента. Поможет им в этом идентификация задачи как знакомой: она будет способствовать переносу метода решения (мысленного эксперимента) известной задачи на новую задачу. Она же будет способствовать переносу способа решения задачи. Например, подскажет, в какие дополнительные условия следует поместить предмет познания.

Проходя четвертую стадию, учащиеся должны обратить внимание на структуру задач, решаемых посредством мысленного эксперимента. Это позволит дать общее описание задач, для решения которых требуется проведение мысленного эксперимента.

На пятой стадии учащиеся проводят мысленный эксперимент в незнакомой ситуации. Догадаться о целесообразности его проведения они могут, сопоставив решаемую задачу с описанием, полученным на четвертой стадии. Так как ситуация незнакома, учащиеся не смогут перенести в нее известный способ рассуждения, как это происходит на четвертой стадии. Для проведения мысленного эксперимента им необходимо предварительно спланировать, смоделировать его. Мы характеризуем данную стадию как моделирование мысленного эксперимента.

Смена стадий мысленного эксперимента зависит от того, какие из них могут быть освоены школьниками того или иного возраста. Данный вопрос требует отдельного рассмотрения и нами не изучался.

Учебные пособия для освоения мысленного эксперимента

Введение мысленного эксперимента в математическое образование в основной школе и организация математической деятельности школьников могут быть осуществлены при некоторой трансформации существующих программ — она требует от учителя дополнительной предметной подготовки, дополнительного времени. В качестве альтернативы в лаборатории «Развивающее обучение математике» Института психологии и педагогики развития (г. Красноярск) разработаны учебные пособия и учебные тетради по геометрии, в которых развернута математическая деятельность. Эти учебные средства созданы в соответствии с методом учебно-предметных проблем: предметный материал группируется по учебно-предметным проблемам и предъявляется в процессе их решения (подробнее см. [2]).

В пособии и тетради представлены все три вида математической деятельности. В пособии приведены образцы деятельности с математическим материалом. В тетради виды математической деятельности предлагается выполнять самим учащимся. Для этого в ней приводится система вопросов, организующих деятельность школьников, и оставлено место для ответов.

Мысленный эксперимент предлагается в качестве средства формирования такого вида математической деятельности, как формулирование утверждений. Пособие охватывает преимущественно первую и вторую стадии введения мысленного эксперимента. Третья стадия в нем затрагивается эпизодически, через задания для учащихся. В тетради осуществляются третья и четвертая стадии введения мысленного эксперимента. Пятая стадия в данных учебных средствах не представлена. Мы полагаем, что реализовать ее можно лишь на материале, выходящем за пределы школьной программы.

Апробация учебных пособий по освоению мысленного эксперимента

С 2005 г. разработанные учебные пособия и тетради проходят апробацию во второй ступени Красноярской университетской гимназии № 1 «Универс». Для отслеживания становления математического мышления школьников при выполнении ими математической деятельности проведены два исследования математического мышления учащихся.

Задания для диагностики разработаны на основе модели математического мышления, приведенной в начале статьи. В диагностических материалах достижение учеником первого уровня проверяется с помощью заданий, в которых надо построить или выделить фигуру, обладающую заданными свойствами. Например, надо таким образом расположить четыре прямые, чтобы они образовали три точки пересечения. В заданиях, диагностирующих второй уровень, требуется определить неизвестные числовые характеристики фигуры, выразив их через известные. Например, требуется найти величины углов шестиугольника, если известно их соотношение и сумма углов четырехугольника (сумма углов шестиугольника неизвестна). Третий уровень тестируют с помощью заданий, для выполнения которых требуется выделить способ в предлагаемом рассуждении. Например, надо найти сумму внутренних углов невыпуклого семиугольника, и есть рассуждение, показывающее, как вычисляется сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника. Для выполнения всех заданий учащимся достаточно знать определения рассматриваемых фигур; специальных знаний об этих фигурах здесь не требуется.

В обоих срезах задания имеют одинаковую структуру. Различаются они по содержанию. Например, если в первом срезе требовалось определить максимальное количество точек пересечения прямых, то во втором срезе предлагалось найти максимальное количество частей плоскости, ограниченных прямыми.

Первый срез проведен в феврале 2006 г. В нем приняли участие школьники двух 7-х и двух 8-х классов КУГ № 1 «Универс» (по одному экспериментальному и контрольному классу в каждой параллели) — всего 86 человек. В экспериментальных классах ученики занимаются по учебным пособиям и тетрадям, разработанным лабораторией «Развивающее обучение математике» Института психологии и педагогики развития; в контрольных классах ученики занимаются по учебнику Л.С. Атанасяна. По оценкам учителей, преподававших в выбранных классах, контрольные классы на начало эксперимента были сильнее экспериментальных. Первый срез позволил зафиксировать наличный уровень математического мышления школьников. Второе исследование проведено в феврале 2007 г., в нем участвовали те же ученики. Оно позволило отследить динамику становления математического мышления школьников за год.

При обработке результатов обоих срезов мы ориентировались на представления о развитии мышления, реализованные в рамках проекта «Индивидуальный прогресс». Развитие мышления может быть уровневым и линейным: «уровневый прогресс означает переход школьника с одной ступени на другую, более высокую ...линейный прогресс характеризует количественные сдвиги в рамках достигнутой ступени (уровня)» [13, с. 30].

В качестве параметров развития мышления в проекте «Индивидуальный прогресс» использовались число учеников, достигших определенного уровня мышления, и среднее количество задач, решаемых на каждом уровне. При этом достигшим уровня считается ученик, который совершает успешные действия на этом уровне. В силу вложенности уровней ученик, достигший определенного уровня математического мышления, достиг и более низких его уровней. Максимально достигнутый уровень в нашей терминологии соответствует занятому уровню в терминологии проекта «Индивидуальный прогресс». Выбор в качестве параметра числа достигших определенного уровня позволяет однозначно толковать произошедшие изменения. Вторым параметром послужило среднее количество выполняемых на каждом уровне заданий.

Из табл. 2 видно, как за год изменилось число учеников, достигших определенного уровня математического мышления. В ней младшими названы классы, которые на момент первого среза были седьмыми. Соответственно старшими названы классы, на момент первого среза бывшие восьмыми.

Таблица 2

Число учеников, достигших определенного уровня математического мышления

	Первый уровень		Второй уровень		Третий уровень	
	Первый срез	Второй срез	Первый срез	Второй срез	Первый срез	Второй срез
Младший экспериментальный (28 учеников)	19 (67,9%)	23 (82,1%)	10 (35,7%)	12 (42,9%)	0 (0%)	5 (17,9%)
Младший контрольный (21 ученик)	14 (66,7%)	17 (81%)	2 (9,5%)	11 (52,4%)	0 (0%)	2 (9,5%)
Старший экспериментальный (13 учеников)	13 (100%)	12 (92,3%)	8 (61,5%)	6 (46%)	1 (7,7%)	1 (7,7%)
Старший контрольный (24 ученика)	21 (87,5%)	20 (83,3%)	19 (79,2%)	12 (50%)	5 (20,8%)	3 (12,5%)

Для отслеживания уровневого развития использован тест Мак-Немара. Проверялась следующая нулевая гипотеза: число учеников, потерявших уровень, не отличается от числа учеников, этого уровня достигших. Подтверждение нулевой гипотезы означает сохранение числа учеников, достигших уровня.

Проверка нулевой гипотезы показала следующее ($p > 95\%$).

• В каждом классе число учеников, достигших первого уровня, осталось прежним.

• В экспериментальных классах число учеников, достигших второго уровня, осталось прежним; в младшем контрольном классе оно увеличилось, в старшем контрольном классе оно уменьшилось.

• В младшем экспериментальном классе число учеников, достигших третьего уровня, увеличилось, в старшем экспериментальном осталось прежним; в контрольных классах число таких учеников осталось прежним.

Результаты показывают, что в экспериментальных классах ни на одном уровне не произошло снижения числа учеников, достигших его. Отсутствие снижения мы оцениваем как показатель развития математического мышления. Основанием для этого служат забывание за год некоторых знаний, помогающих при выполнении заданий, и характерное для рассматриваемого возраста падение интереса к учебной деятельности. Таким образом, данные табл. 2 свидетельствуют об уровневом прогрессе учащихся экспериментальных классов.

В табл. 3 представлено среднее количество заданий, выполняемых учащимися экспериментальных и контрольных классов на каждом уровне.

Таблица 3

Среднее количество заданий, выполняемых учениками на каждом уровне математического мышления

	Первый уровень		Второй уровень		Третий уровень	
	Первый срез	Второй срез	Первый срез	Второй срез	Первый срез	Второй срез
Младший экспериментальный	3,25	2,55	2,14	2,46	1	1,62
Младший контрольный	3	2,5	1,69	3,2	1	1,33
Старший экспериментальный	4,13	3,33	2,56	2,71	1,5	1,57
Старший контрольный	3,46	3,04	4,04	3,17	1,6	1,44

Среднее количество заданий рассчитано по ученикам, которые выполнили хотя бы одно задание рассматриваемого уровня. Изменения в нем по каждому классу проверялись с помощью Т-критерия Уилкоксона. Получены следующие результаты ($p > 95\%$).

• В младшем экспериментальном классе значимо увеличилось количество задач, решаемых на третьем уровне. Изменения в количестве задач, решаемых на других уровнях, статистически незначимы.

• В седьмом контрольном классе значимо увеличилось количество задач, решаемых на втором уровне. Изменения в количестве задач, решаемых на других уровнях, статистически незначимы.

• Изменения в количестве задач, решаемых учащимися восьмых классов, статистически незначимы.

Таким образом, данные второго среза показывают, что организация математической деятельности в основной школе и введение мысленного эксперимента способствуют становлению математического мышления учащихся основной школы. В становлении мышления в обоих экспериментальных классах наблюдается и уровневый, и линейный прогресс. В то же время по некоторым показателям в контрольных классах выражен регресс. Так, в старшем контрольном классе уменьшилось количество учеников, достигших второго уровня.

Литература

1. Аронов А.М., Скрипка А.М. Исследовательский подход: методические особенности обучения планиметрии методом учебно-предметных проблем // Научное общество учащихся. 2007. № 7. С. 23–32.

2. Аронов А.М., Скрипка А.М. О понятии геометрического мышления (на материале элементарной геометрии) // Вестник КГУ. 2005. № 6. С. 131–135.

3. Аронов А.М., Знаменская О.В. Условия индивидуального прогресса школьников в математике // Педагогика развития: социальная ситуация развития и образовательные среды: Материалы конф. / отв. за выпуск Б.И. Хасан. Красноярск: РИО КрасГУ, 2006. С. 103–110.

4. Аронов А.М., Соболевская Ю.С. Мысленный эксперимент в дополнительном математическом образовании подростков // Образование в Сибири. 2005. № 13. С. 115–124.

5. Библер В.С. От наукоучения — к логике культуры: Два философских введения в XXI век. М.: Политиздат, 1990.

6. Гусев В.А. Каким должен быть курс школьной геометрии // Математика в школе. 2002. № 3. С. 4–8.

7. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. М.: ИНТОР, 1996.

8. Длугач Т.Б. Проблема единства теории и практики в немецкой классической философии. М.: Наука, 1986.

9. Кларин М.В. Педагогическая технология в учебном процессе: Анализ зарубежного опыта. М.: Знание, 1989.

10. Концепция математического образования (проект) // Математика в школе. 2000. № 2.

11. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И.Н. Веселовского. М.: Наука, 1967.

12. Мостепаненко М.В. Мысленный эксперимент и проблема формирования теоретического знания // Вопросы философии. 1973. № 2. С. 94–100.

13. Мониторинг индивидуального прогресса учебных действий школьников / под ред. П.Г. Нежнова, Б.И. Хасана, Б.Д. Эльконина. Красноярск: Печатный центр КПД, 2006.

14. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. М.: Просвещение, 1983.

15. Холодная М.А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования. СПб.: Питер, 2002.

16. Шабат Г.И. «Живая математика» и математический эксперимент // Вопросы образования. 2005. № 3. С. 156–162.